Concours CAE session 2017

Composition : **Mathématiques 1** (algèbre, analyse)

Durée : **2 Heures**

EXERCICE I

On considère les fonctions ch et sh définies sur IR par :

$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ainsi que la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction sh, puis en déduire le signe de sh(x) pour x appartenant à IR.
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de sh(x). En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de IR dans IR.
5. Etudier les variations de la fonction ch.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathrm{IR},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$
7. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.
8. Etudier la parité de la fonction f.
9. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction sh.
10. En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer f '(0).
11. Justifier que f est dérivable sur IR_+^* et sur IR_-^* et calculer f '(x) pour $x \in \mathrm{IR}^*$.
12. On pose $\forall x \in \mathrm{IR}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}x - x\mathrm{ch}x$. Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de h(x).
13. Déterminer les variations de f sur IR^+ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE II

L'espace vectoriel de IR^3 est muni de sa base canonique B=(e_1, e_2, e_3) et f l'endomorphisme de IR^3 défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = -4e_1 + e_2 - 5e_3 \\ f(e_2) = -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ f(e_3) = 8e_1 - e_2 + 9e_3 \end{cases}$$

1°)a) A désigne la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base canonique. Donner l'expression de A et montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme de IR^3.

b) f^{-1} désigne l'automorphisme réciproque de f. Donner l'expression de $f^{-1}(e_1)$, $f^{-1}(e_2)$ et $f^{-1}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

2°) Montrer que matrice B=A-4I n'est pas inversible puis en déduire toutes les valeurs propres de la matrice A. (I désigne la matrice identité d'ordre3).

L'endomorphisme f est diagonalisable ? Justifier.

3°) Déterminer les sous espaces propres associés à chaque valeur propre.

EXERCICE III

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$

Pour tout n de IN, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de IN, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Montrer que : $\forall n\in IN, u_n\leq \ln(2)$

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4.a) Pour tout n de IN, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.

b) En déduire que : $\forall n\in IN, \ln(2)-u_n\leq\frac{1}{n+1}$

c) Donner la limite de la suite (u_n).

5. Pour tout entier naturel supérieur ou égal 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$

a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

b) Montrer que $\forall n\geq 2,\quad 0\leq v_n\leq\frac{1}{n-1}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$